

ΠΡΩΤΗ & ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΟΛΕ: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΣΕΡΟΥΕΤΡΙΑ

ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ Έστω V, W δύο προκείμενοι χώροι εφοδιασμένοι με το συνδυαστικό γινόμενο

(α) Η κάθε ισομετρία χράσσεται κατά μοναδικό τρόπο ως αθροισμα ενός ορθογωνίου μετασχηματισμού και ενός σκαθιστού.

(β) Αν δύο ισομετρίες $\phi: V \rightarrow W$ διαφέρουν υπό μια γραμμική απεικόνιση $g: V \rightarrow W$ μια σκαθιστή $\rightarrow$ ο g ορθογωνίου μετασχηματισμός.

~~ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ~~ Έστω V, W δύο προκείμενοι χώροι εφοδιασμένοι με το συνδυαστικό γινόμενο και έστω $\phi: V \rightarrow W$ ισομετρία. Τότε, τα στοιχεία είναι ισοδύναμα

(α) ϕ ορθογωνίου μετασχηματισμού

(β) $\phi(\sigma), \sigma$

(γ) $\| \phi(\sigma) \|, \| \sigma \|, \forall \sigma \in V$

(δ) $\langle \phi(\sigma), \phi(\tau) \rangle = \langle \sigma, \tau \rangle, \forall \sigma, \tau \in V$

Απόδειξη

$$(a) \phi(0) = 0$$

$$(b) \|\phi(u)\| = \|u\|, \forall u \in V$$

$$(c) \langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V$$

Απόδειξη

(i) Έστω ϕ ισομετρία με $\phi: V \rightarrow W$ κι έστω η απεικόνιση $g: V \rightarrow W$ με $g(v) = \phi(v) - \phi(0)$ $\forall v \in V$. Θ.ε.ο $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \eta g \text{ είναι γραμμική μετασχηματισμός} \\ \rightarrow \text{τη μοναδιαία γραμμή} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow (a) \text{ η } g \text{ ισομετρία} \\ \rightarrow (b) g(0) = 0 \end{array} \right.$

$$(a) g(0) = \phi(0) - \phi(0) = 0$$

$$(b) \text{ η } g \text{ ισομετρία: Έστω } u, v \in V \Rightarrow \|g(u) - g(v)\| \stackrel{(a)}{=} \|\phi(u) - \phi(0) - \phi(v) + \phi(0)\| =$$

$$= \|\phi(u) - \phi(v)\| \stackrel{\phi \text{ ισομετρία}}{=} \|u - v\| \text{ Άρα η } g \text{ είναι ισομετρία.}$$

Μάλιστα, από (a), (b) η g είναι γραμμικός μετασχηματισμός

$$\left(\begin{aligned} & \theta \in \mathcal{O} \text{ επιπλέον, } g(v) = 0 \\ & \|g(u) - g(v)\| = \|u - v\| = \|g(u) - g(v)\|^2 \cdot \|u - v\| = 0 \end{aligned} \right)$$

Μετασχηματισμός Έστω $\phi(v) = h(v) + \tilde{b}$, h ορθογώνιος μετασχηματισμός

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \tilde{b} \cdot \phi(\tilde{b}) = \phi(\tilde{b}) \cdot \tilde{b} \stackrel{\text{ορθός}}{=} \phi(\tilde{b}) \cdot h(\tilde{b}) = \tilde{b}$$

$$\text{και } h(v) = \phi(v) - \tilde{b} = \phi(v) - g(\tilde{b}) - g(v), \forall v \in V$$

Διότι h γραμμικός είναι μοναδικός.

(α) Έστω $f: V \rightarrow W$ ισομετρία, $f = g \circ \theta$, g γραμμικός.

Θέτουμε $h = g \circ \theta$ ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Από $h = g \circ \theta$ είναι γραμμικός, αφού τόσο h g είναι ισομετρίες.

$$\text{Έστω } u, v \in V \quad \text{Θέτουμε } \|u - v\| = \|g(u) - g(v)\| \quad \text{Τότε } \|g(u) - g(v)\| = \|f(u) - \theta \cdot f(v) + \theta \cdot f(v) - g(v)\|$$

$$\text{και } \theta = f(\tilde{b}) - g(\tilde{b}) \stackrel{\text{ορθογώνιος}}{=} f(\tilde{b}) - \theta = f(\tilde{b})$$



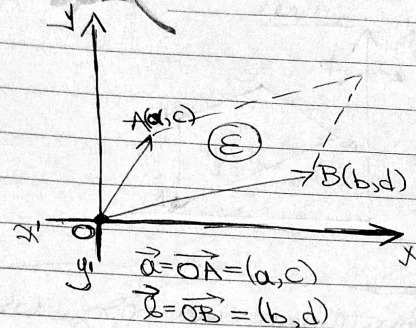
~22 ώρες~



9.05.17

Τετάρτη Εύρηκα (Ενηλίκων)

Μετασχηματισμός επιπέδου & όγκου μέσω γραμμ. μετασχηματισμού:



$$\epsilon = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\epsilon = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = |ad - bc|$$

Θα παράγει γραμμ. μετασχηματισμό $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \phi(\vec{a}) = A\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a + a_2 c \\ a_3 a + a_4 c \end{pmatrix}$

$$\text{και } \phi(\vec{b}) = A\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b + a_2 d \\ a_3 b + a_4 d \end{pmatrix}$$

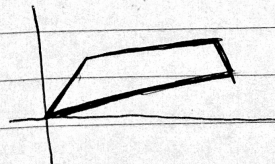
$$\epsilon_{\text{new}} = |\phi(\vec{a}) \times \phi(\vec{b})| = \begin{vmatrix} a_1 a + a_2 c & a_3 a + a_4 c & 0 \\ a_1 b + a_2 d & a_3 b + a_4 d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |(a_1 a + a_2 c)(a_3 b + a_4 d) - (a_1 b + a_2 d)(a_3 a + a_4 c)| =$$

$$= |a_1 a_3 ab + a_1 a_4 ad + a_2 a_3 bc + a_2 a_4 cd - a_1 a_3 ab - a_1 a_4 bc - a_2 a_3 ad - a_2 a_4 cd| = |a_1 a_4 (ad - bc) - a_2 a_3 (ad - bc)| = |a_1 a_4 - a_2 a_3| (ad - bc) =$$

$$= |a_1 a_4 - a_2 a_3| \cdot |ad - bc| = \underbrace{|\det(A)|}_{\text{το αρχικό επιβασμό}} \cdot \underbrace{|\det(B)|}_{\text{το αρχικό επιβασμό}} = |\det(A)| \cdot \epsilon_{\text{old}}(\vec{a}, \vec{b})$$

$A\phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ Άρα: Εάν ϕ γραμμ. μετασχηματισμός με $A\phi$ -πίνακα αυτός
 $\Rightarrow \epsilon_{\phi(A,B)} = |\det A\phi| \cdot \epsilon_{\text{old}}(\vec{a}, \vec{b})$



$$A\phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$



Π.χ Έστω το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\phi(\gamma)$ το τε-
τραπύλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$, όπου A', B', Γ', Δ' είναι οι εικόνες
των A, B, Γ, Δ μέσω ορθογώνιου μετασχηματισμού $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
Να υπολογιστεί το $E\phi(\gamma)$ (όπου $A(1, -1, 2), B(2, 2, 2)$
 $\Gamma(0, 1, -3), \Delta(1, 1, 0)$)

Πύση:

$$E\phi(\gamma) = |\det(A)| \cdot E\gamma$$

$$\text{ή } E' = |1 \pm 1| \cdot E = E$$

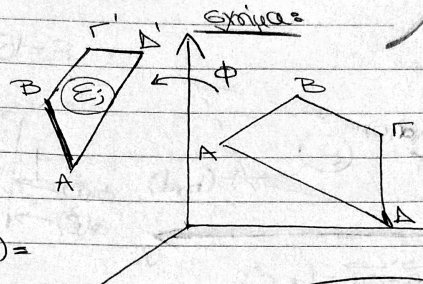
ορθογ. μετασ.

$$= |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2) =$$

$$= \sqrt{36+8} = \sqrt{44}$$

$$= 2\sqrt{11}$$



Εικόνα:

Ενστάνακας είναι ορθογώνιος
εάν η ορίζουσα του είναι ± 1 .

Αλλά έχουμε και τον ελασμεν F^3 της τριγωνικής δεν θα ανεφερώμε για
πρίτσον & κυλινδρικό, θα πρέπει να βρούμε άλλον τρόπο να την λύσουμε

Μετασχηματισμός ογκού.

$$\text{Έστω } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$\text{Παραβλέπουμε ότι } \forall \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}\} = |\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}|.$$

$$\text{Έστω } \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ορθογώνιου μετασφ. με } \det A\phi \text{ ο τώνανκας αυτού.}$$

$$\text{Οπότε } \Pi: \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}\} \rightarrow \{\phi(\vec{a}), \phi(\vec{b}), \phi(\vec{\gamma})\}$$

$$\Rightarrow \text{Ισχύει } \circ \forall \phi(\gamma) = \{\phi(\vec{a}), \phi(\vec{b}), \phi(\vec{\gamma})\} = |\det A\phi| \cdot |\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}|$$

